РФЯЦ-ВНИИЭФ
РОСАТОМ

МАЛАХИТ
АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ
МОРСКОЕ БЮРО МАШИНОСТРОЕНИЯ

БГТУ «ВОЕНМЕХ»
ИМ. Д.Ф. УСТИНОВА
ОСНОВАН В 1932 Г.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НДС В ПРИЛОЖЕНИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА И ИНЖЕНЕРНОГО АНАЛИЗА ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Учебное пособие

ЛОГОС®

3

ЛОГОС ПРОЧНОСТЬ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

БАЛТИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
“ВОЕНМЕХ” им. Д.Ф. УСТИНОВА

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НДС В ПРИЛОЖЕНИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА И ИНЖЕНЕРНОГО АНАЛИЗА ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Учебное пособие

Утверждено
на заседании Ученого совета
01 декабря 2022 г.

2024

УДК 539.3:519.6]:004.925.8(075.8)
ББК 38.113
Ч 67

Авторы:

Г.В. Титов, А.И. Смирнов, А.А. Курносов,
А.С. Прядкин, К.А. Бурковецкий, Д.В. Фомичев,
А.А. Деулин, Г.В. Чижов, Е.В. Глазунова

Ч 67 Численное моделирование НДС в приложении к решению задач механики деформируемого твёрдого тела и инженерного анализа элементов конструкций: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МАИ, 2024. — 40 с.: ил.

ISBN 978-5-4316-1116-2

Приведены основные понятия прочностных расчётов, принципы построения расчётных схем, различные методы численного физического моделирования возможности современного программного обеспечения, применяемого для решения статических задач механики деформируемого твёрдого тела, порядок действий при проведении расчетов на прочность с применением пакета «Логос», примеры расчётов типовых конструкций.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальностям 17.05.01 «Боеприпасы и взрыватели» (специалитет); 24.03.01 «Ракетные комплексы и космонавтика» (бакалавриат); 24.04.01 «Ракетные комплексы и космонавтика» (магистратура); 24.05.01 «Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов (специалитет); 27.05.01 «Специальные организационно-технические системы» (специалитет), а также для специалистов в области строительной механики и методов численного моделирования физических процессов.

Рецензенты:

кафедра «Ракетостроение» Балтийского государственного технического университета «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова (зав. кафедрой докт. техн. наук, профессор *В.А. Бородавкин*);

гл. науч. сотрудник АО «СПМБМ “Малахит”», докт. техн. наук, профессор *С.А. Петров*

ISBN 978-5-4316-1116-2 © АО «СПМБМ «Малахит», 2024

1 ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТАХ

1.1 ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА

Инженерная деятельность связана с созданием конструкций, отвечающих требованиям прочности, надёжности и долговечности. Конструкцией принято называть механическую систему геометрически неизменных элементов, относительное перемещение точек которой возможно лишь в результате её деформации. *Деформацией* принято называть изменение относительного положения частиц тела, связанное с их перемещением.

Конструкции обычно состоят из набора стандартизированных элементов.

Брус — это твёрдое тело, полученное перемещением плоской фигуры вдоль направляющей линии так, что его длина будет значительно больше двух других размеров.

Стержнем называется прямолинейный брус, который работает на растяжение (сжатие).

Балкой называется брус, который испытывает изгиб в качестве основного способа нагружения.

Из брусьев составляются расчётные схемы многих инженерных конструкций, таких как фермы, рамы, перекрытия и другие пространственные конструкции.

Фермой называется совокупность стержней, соединённых шарнирами.

Рама — это совокупность балок, жёстко соединённых между собой.

Перекрытием называют систему пересекающихся балок, скреплённых между собой в узловых точках, предназначенную для восприятия нагрузок, действующих перпендикулярно плоскости, образованной этими балками.

Пластинкой называется тело, ограниченное двумя плоскостями, расстояние между которыми мало по сравнению с двумя другими размерами тела.

Пластины воспринимают усилия в двух направлениях, что в ряде случаев бывает выгодно с точки зрения экономии материалов. Расчёт пластин и систем, составленных из них, значительно сложнее расчёта стержневых систем.

Оболочкой называется тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами тела.

Под прочностью конструкции понимают свойство её элементов и соединений сопротивляться деформации и разрушению под воздействием внешних сил.

Таким описанием конструкций занимается раздел науки, называющийся механикой деформируемого твёрдого тела, различные её подразделы заняты описанием различных её характеристик и предлагают разнообразные виды расчётов.

В МДТТ выделяют несколько основных подразделов:

- сопротивление материалов;
- теория упругости;
- теория пластичности;

– теория ползучести;
– строительная механика.

Сопротивление материалов — это наука о прочности, жёсткости и устойчивости элементов инженерных конструкций. Рассматриваемый в рамках курса строительной механики математический аппарат, благодаря вводимым предположениям и гипотезам, подходит для решения широкого спектра задач с приемлемой для практических расчётов точностью.

Теория упругости — раздел МДТТ, изучающий перемещения, деформации и напряжения в телах под действием внешних нагрузок.

Под упругостью понимают свойство материала полностью восстанавливать геометрическую форму и размеры тела после снятия внешней нагрузки. Пользуясь аппаратом теории упругости, обычно говорят о принадлежности деформаций к упругой области, в которой можно установить линейную зависимость между напряжениями и деформациями. Данный подраздел обычно используется для уточнения расчётов строительной механики и для расчёта тел, сложных для точной оценки в рамках строительной механики, таких как тонкостенные балки, оболочки.

В случаях, когда невозможно говорить о линейности зависимости напряжений и деформаций, используется теория пластичности.

Под *пластичностью* понимают свойство твёрдых тел изменять свою форму и размеры под действием внешних нагрузок и сохранять их после снятия этих нагрузок. В данное определение не входит произвольное изменение с течением времени (например ползучесть).

Под *ползучестью* понимают свойство твёрдых тел деформироваться с течением времени под воздействием постоянной нагрузки. Возникающие вследствие этого деформации являются постоянными и не исчезают после снятия внешней нагрузки.

Строительной механикой называют науку о методах расчёта сооружений на прочность, жёсткость и устойчивость.

Под жёсткостью понимают способность тела или конструкции сопротивляться возникновению деформации. Под устойчивостью упругой системы понимают её свойство возвращаться в состояние равновесия после малых отклонений от этого состояния.

Решение задач названных выше подразделов МДТТ требует построения расчётной схемы задачи.

Расчётная схема — это упрощённое изображение реальной конструкции, которое освобождено от её несущественных, второстепенных особенностей и которое принимается для математического описания и расчёта.

Составление расчётной схемы целесообразно проводить по определённому алгоритму, который можно представить в виде следующей последовательности шагов:

1) упрощение геометрической формы конструкции;
2) использование типовых способов закрепления;
3) упрощение нагрузки;
4) идеализация свойств материала.

Составив описание конструкции по данному алгоритму и используя аналитические зависимости, можно решить разнообразные задачи подразделов механики деформируемого твёрдого тела.

1.2 ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА

Аналитические зависимости позволяют анализировать множество вариантов при различных входных параметрах; кроме того, они не требуют значительных вычислительных ресурсов. Однако аналитические решения получены только для простейших и типовых элементов реальных конструкций, которые заменяются простыми расчётными схемами, допускающими получение аналитических решений, в то время как потребности практики проектирования судов и летательных аппаратов поставили вопрос о создании более универсальных и практически реализуемых методов, которые позволяли бы получать достоверное решение для сколь угодно геометрически сложной формы конструкции. Отсюда возникла идея попытаться построить решение задачи не при помощи одной или нескольких функций, которые полностью исчерпали бы это решение, а при помощи дискретного множества чисел, которые описывали бы поведение конструкции в отдельных её точках.

Сами эти числа в дискретных точках являются или искомыми величинами, или параметрами, которые используются для построения функций, описывающих поле перемещений, напряжений или деформаций в конструкции. Так возникли «методы дискретизации», или «численные методы».

Методы дискретизации можно разделить по следующим признакам:

1) тип исходных математических соотношений:
- дифференциальные уравнения, описывающие поведение моделируемой среды;
- вариационные принципы, записанные в интегральной форме и эквивалентные дифференциальным уравнениям;

2) метод дискретизации исходных соотношений:
- метод конечных разностей;
- метод взвешенных невязок.

Комбинация перечисленных методов дискретизации даёт четыре категории методов, представленных в таблице 1.1. Следует упомянуть также, что кроме перечисленных в таблице 1.1 методов, используются и комбинации дискретных и аналитических методов — метод полос, метод редукционных коэффициентов и т.п.

Таблица 1.1 — Классификация численных методов

Дискретизация	Исходные соотношения	Метод дискретизации
Разностные отношения	Дифференциальные уравнения	Классический метод конечных разностей
	Вариационные принципы	Вариационно-разностные методы
Базисные функции	Дифференциальные уравнения	Метод Бубнова–Галеркина, метод наименьших квадратов, моментов, метод коллокаций по точкам и подобластям
	Вариационные принципы	Метод Ритца, метод конечных элементов

Методы, использующие базисные функции, составляют обширный класс методов под общим названием «методы взвешенных невязок». Они обладают бóльшей общностью, чем прямой метод конечных разностей, и, более того, для построения расчётных схем на их основе можно воспользоваться теми процедурами, которые применяются в методе конечных элементов.

Так, в каждом конкретном случае с помощью метода взвешенных невязок можно прийти к таким же соотношениям, что и в методе конечных разностей, но получение их более трудоёмко, и поэтому общий метод получения расчётных соотношений в виде конечных разностей не рекомендуется к использованию.

В последние годы широкое распространение получил метод конечных элементов.

Основная идея метода состоит в том, что область интегрирования разбивается на ряд элементов, которые можно рассматривать как отдельные её части. В пределах этих частей неизвестные функции аппроксимируются базисными функциями простейшего вида, например, полиномами, коэффициенты которых выражаются через неизвестные значения искомых переменных в узловых точках границ элемента.

Выбор в качестве базисных функций кусочных полиномов, отличных от нуля только в непосредственной окрестности одного узла, позволяет снять сложные вопросы построения систем функций, требующих расширения их числа путём включения следующих членов ряда и удовлетворения кинематическим граничным условиям во всей рассматриваемой области. В методе конечных элементов для повышения точности расчёта количество пробных функций не меняется, а производится только измельчение конечного элемента. Эти особенности метода конечных элементов позволяют существенно упростить алгоритмы расчёта и обеспечить удовлетворение граничных условий.

2 ОБЗОР ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ С ИЗВЕСТНЫМ АНАЛИТИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ

2.1 ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЗАДАЧАХ С ЭТАЛОННЫМ АНАЛИТИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ

При анализе конструкции судов и летательных аппаратов аналитическими методами первостепенной является задача по описанию конструкции простейшими для расчёта примитивами с достаточной точностью. В отличие от твёрдого тела — массива — тонкостенные конструкции всегда имеют хотя бы один геометрический размер, который значительно меньше других размеров. Это позволяет упростить исходную систему уравнений теории упругости и свести реальное трёхмерное напряжённо-деформированное состояние к двумерному, как в случае пластин и оболочек, или даже к одномерному, как в случае балок и стержней.

Расчёт любой реальной конструкции всегда начинается с построения её расчётной схемы, обладающей свойствами, с определённой степенью точности и достоверности отражающими её реальные свойства. При этом на каждом этапе составления расчётной схемы принимаются допущения:

– при упрощении геометрической формы конструкции;
– при идеализации граничных условий;
– при идеализации свойств материала.

Рассмотрим аппарат строительной механики в части решения задач изгиба балок.

Техническая теория изгиба балок основана на следующих допущениях:

1) балки считаются достаточно жёсткими, то есть прогибы их малы по сравнению с высотой балки, а углы поворота сечений малы по сравнению с единицей;

2) нормальными напряжениями в сечениях, параллельных оси балки, пренебрегают из-за их малости;

3) принимается гипотеза о плоских сечениях, согласно которой при чистом изгибе балки её сечения, первоначально плоские и перпендикулярные нейтральной оси балки (геометрическое место точек, для которых линейная деформация равна нулю), остаются плоскими и перпендикулярными нейтральной оси в деформированном состоянии;

4) предполагается существование линейной зависимости между напряжениями и деформациями, согласно которой

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \tag{2.1}$$

где σ — нормальное напряжение в поперечном сечении балки, Па; ε — относительная деформация, направленная вдоль оси балки; E — модуль нормальной упругости материала балки, Па.

При изгибе балки в плоскости YOZ относительное удлинение волокна ε, расположенного на расстоянии y от нейтральной оси, согласно гипотезе плоских сечений, равно

$$\varepsilon = -\frac{y}{\rho}, \tag{2.2}$$

где y — расстояние от нейтральной оси до рассматриваемого волокна балки, м; ρ — радиус кривизны нейтральной оси балки, м.

Основываясь на выражениях (2.1) и (2.2) получим

$$\sigma = -\frac{E \cdot y}{\rho}. \tag{2.3}$$

Выражение (2.3) указывает на неизменность напряжений по ширине балки. Условие отсутствия осевых усилий принимает следующий вид:

$$\int_F \sigma \mathrm{d}F = -\frac{E}{\rho}\int_F y\mathrm{d}F = 0, \tag{2.4}$$

где F — площадь поперечного сечения балки, м^2; $\int_F y\mathrm{d}F$ — статический момент поперечного сечения балки, м^3.

Из условия (2.4) следует, что нейтральная ось балки проходит через центры тяжести всех её сечений, так как только в этом случае статический момент площади равен нулю.

Момент внутренних усилий относительно оси перпендикулярной плоскости действия поперечной нагрузки определяется по формуле

$$M_x = \int_F \sigma y\mathrm{d}F = -\frac{E}{\rho}\int_F y^2\mathrm{d}F = \pm M, \tag{2.5}$$

где M — момент внешних усилий, Н·м; $\int_F y^2\mathrm{d}F$ — главный центральный момент инерции площади поперечного сечения балки относительно оси OX.

Момент внутренних усилий относительно плоскости изгиба определяется по формуле

$$M_y = \int_F \sigma x\mathrm{d}F = -\frac{E}{\rho}\int_F xy\mathrm{d}F = 0, \tag{2.6}$$

где $\int_F xy\mathrm{d}F$ — центробежный момент инерции, м^4.

Равенство нулю момента внутренних усилий относительно плоскости изгиба M_y следует из равенства нулю центробежного момента инерции $xy\mathrm{d}F$. Отсюда следует, что при действии на балку нагрузки, лежащей в одной из главных плоскостей изгиба, имеет место плоский изгиб, то есть нейтральная ось балки остаётся плоской кривой, находящейся в плоскости действия нагрузки.

Из выражения (2.5) непосредственно вытекает основное уравнение изгиба:

$$\frac{E \cdot I}{\rho} = \pm M. \tag{2.7}$$

На основании формул (2.3) и (2.7) нормальное напряжение при изгибе выражается равенством

$$\sigma = \pm\frac{M_y}{I}. \tag{2.8}$$

Для рассматриваемой балки и принятой системы координатных осей положительным прогибом является прогиб, совпадающий с положительным направлением оси *OY*, а положительному углу поворота сечения балки соответствует поворот его по часовой стрелке, что совпадает с положительным значением первой производной стрелки прогиба *z*.

За положительное направление поперечной нагрузки примем направление оси *OY*.

Положительным направлением перерезывающей силы будем считать такое направление, когда действие левой отсечённой части балки на оставшуюся её правую часть эквивалентно положительной поперечной силе, то есть направлено вниз. Положительная перерезывающая сила, учитывающая влияние правой отсечённой части на оставшуюся левую, будет направлена в обратную сторону.

Положительным изгибающим моментом будем считать такой, при котором любая отсечённая часть стремится выгнуться выпуклостью вверх.

Реакции опор будем отождествлять с поперечными нагрузками, распространяя на них принятое правило знаков для сил, то есть реакция опоры, направленная вниз — положительна, а вверх — отрицательна.

Для установления связи между интенсивностью поперечной нагрузки, перерезывающей силой и изгибающим моментом, рассмотрим выделенный из балки элемент длиной *dz*, м, показанный на рисунке 2.1, загруженный поперечной нагрузкой интенсивностью *q*, Н/м, изгибающими моментами и перерезывающими силами, заменяющими действие отсечённых частей балки в местах разреза.

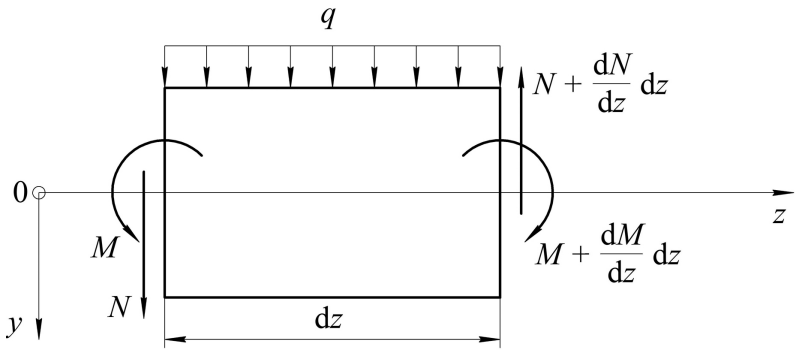

Рисунок 2.1 — Элемент длиной *dz*, выделенный в балке, загруженной поперечной нагрузкой *q*

Перерезывающая сила *N* и изгибающий момент *M* действуют в левом сечении выделенного элемента, в правом сечении они получают приращение, соответственно равные

$$N + \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z \text{ и } M + \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z. \tag{2.9}$$

Составляя уравнение проекций всех сил на ось *OY*, получим

$$N - \left(N + \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\right) + q\mathrm{d}z = 0. \tag{2.10}$$

Составляя уравнение моментов сил относительно правого конечного сечения элемента, получим

$$M - \left(M + \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z \right) + N\mathrm{d}z + \frac{q\mathrm{d}z^2}{2} = 0. \tag{2.11}$$

Из (2.11) при $\mathrm{d}z \to 0$ получим

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}z} = q, \tag{2.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z} = N, \tag{2.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}z^2} = q. \tag{2.14}$$

Зависимости (2.12), (2.13) и (2.14) известны как теорема Журавского.

Из уравнения (2.7):

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{M}{E \cdot I}. \tag{2.15}$$

На основании формулы дифференциальной геометрии кривизна изогнутой оси балки может быть представлена следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{d}^2\upsilon}{\mathrm{d}z^2}\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}z}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}, \tag{2.16}$$

считая перемещения балки при изгибе малыми, в знаменателе выражения (2.16) можем пренебречь квадратом производной стрелки прогиба υ по оси OZ по сравнению с единицей, что позволит получить приближенное выражение для кривизны:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{d}^2\upsilon}{\mathrm{d}z^2}. \tag{2.17}$$

Подставляя его в уравнение (2.15), получим

$$\frac{\mathrm{d}^2\upsilon}{\mathrm{d}z^2} = \frac{M}{E \cdot I}. \tag{2.18}$$

Уравнение (2.18) известно как основное дифференциальное уравнение изгиба балки. Представим его в виде

$$E \cdot I \cdot \upsilon'' = M. \tag{2.19}$$

Используя зависимости (2.13) и (2.14), получим

$$\left(E \cdot I \cdot \upsilon''\right)' = N, \tag{2.20}$$

$$\left(E \cdot I \cdot \upsilon''\right)'' = q. \tag{2.21}$$

Для однородных призматических балок, момент инерции которых постоянен,

$$E \cdot I \cdot \upsilon''' = N, \tag{2.22}$$

$$E \cdot I \cdot \upsilon^{IV} = q. \tag{2.23}$$

Уравнение (2.23) является дифференциальным уравнением изгиба однородной призматической балки. Интегрируя его четыре раза, получим общий интеграл дифференциального уравнения изгиба в виде

$$\upsilon = \frac{1}{E \cdot I} \int_z^0 q \mathrm{d}z^4 + \frac{Az^3}{6} + \frac{Bz^2}{2} + Cz + D, \tag{2.24}$$

где A, B, C и D — постоянные интегрирования, которые должны быть определены из граничных условий на концах балки, то есть из условий закрепления её опорных сечений.

Поскольку произвольных постоянных четыре, то на каждом конце балки должны быть заданы по два условия, а именно:

1) стрелка прогиба υ или перерезывающая сила N, или же связь между ними;
2) угол поворота υ' или изгибающий момент M, или же связь между ними.

Наиболее простым типом граничных условий являются такие, когда в опорных сечениях задаются значения элементов изгиба, в таком случае произвольные постоянные интегрирования имеют смысл элементов изгиба, приняв для начального сечения z, равное нулю, получим:

$$\upsilon_{z=0} = D, \tag{2.25}$$

$$\upsilon'_{z=0} = C, \tag{2.26}$$

$$\upsilon''_{z=0} = \frac{M_{z=0}}{E \cdot I} = B, \tag{2.27}$$

$$\upsilon'''_{z=0} = \frac{N_{z=0}}{E \cdot I} = A. \tag{2.28}$$

Тогда выражение (2.24) запишется в виде

$$\upsilon = \frac{1}{E \cdot I} \int_z^0 q \mathrm{d}z^4 + \frac{N_0 z^3}{6} + \frac{M_0 z^2}{2} + \theta_0 z + f_0, \tag{2.29}$$

где N_0 — перерезывающая сила в начальном сечении балки, Н; M_0 — изгибающий момент в начальном сечении балки, Н·м; θ_0 — угол поворота в начальном сечении балки, градус; f_0 — прогиб в начальном сечении балки, м.

Выражение (2.29) может быть использовано для определения упругой линии однопролётной балки, нагруженной поперечной нагрузкой, интенсивность которой задаётся одним и тем же аналитическим выражением на протяжении всего пролёта. Для различных аналитических выражений поперечной нагрузки на разных участках балки, для нагружения сосредоточенными силами и моментами выражение упругой линии не может быть получено из выражения (2.29) либо приведёт к системе боль-

шого числа уравнений, в каждом из которых необходимо определить постоянные интегрирования.

Для таких случаев нагружения воспользуемся методом начальных параметров, предложенным проф. И.Г. Бубновым на основе математической трактовки метода Клебоша.

Метод начальных параметров заключается в том, что начавшая действие нагрузка не изменяет своего аналитического выражения не только до конца своего участка приложения, а до конца балки, тогда как в конце участка её приложения добавляется нагрузка, описываемая таким же аналитическим выражением, но с обратным знаком.

$$\upsilon = \upsilon_0 + \Big\|_{c_2} \delta_2\upsilon + \Big\|_{c_2} \delta_2\upsilon + \ldots + \Big\|_{c_2} \delta_n\upsilon, \tag{2.30}$$

где υ_0 — общий интеграл дифференциального уравнения изгиба на первом от начального сечения балки участке; $\delta_i\upsilon$ — поправка, которая должна быть введена при переходе через сечение c_i.

Произведём в выражении (2.29) линейную замену переменных и, рассматривая в нем значения N_0, M_0, θ_0 и f_0 как приращение соответствующих элементов при переходе через сечение c_i, получим

$$\delta_i\upsilon = \int\limits_{z-c_i}^{0} q_i(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta^4 + \frac{N_i\zeta^3}{6\cdot E\cdot I} + \frac{M_i\zeta^2}{2\cdot E\cdot I} + \theta_i\xi + f, \quad \zeta = z - c_i, \tag{2.31}$$

где q_i — приращение интенсивности поперечной нагрузки, происходящее при переходе через сечение c_i, Н/м; N_i — приращение интенсивности перерезывающей силы, происходящее при переходе через сечение c_i, Н; M_i — приращение интенсивности изгибающего момента, происходящее при переходе через сечение c_i, Н/м; θ_i — приращение интенсивности угла поворота, происходящее при переходе через сечение c_i, градус; f_i — приращение интенсивности прогиба, происходящее при переходе через сечение c_i, м.

2.2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ОДНОПРОЛЁТНОЙ ШАРНИРНО ОПЁРТОЙ БАЛКИ

Балка является одним из самых распространённых конструктивных элементов. Говоря о балке, имеют в виду брус, сечение которого выбирается для наилучшего сопротивления изгибу. Одной из самых распространённых нагрузок для балки можно считать изгиб, вызванный весом закреплённого на ней груза.

Рассмотрим математический аппарат, используемый для определения НДС таких балок, на примере балки, изображённой на рисунке 2.2.

2.3 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ОДНОПРОЛЁТНОЙ ШАРНИРНО ОПЁРТОЙ БАЛКИ

Запишем уравнение упругой линии методом начальных параметров для шарнирно опёртой балки, показанной на рисунке 2.2, длиной ℓ, загруженной сосредоточенной силой P, Н, в середине пролёта. Интенсивность поперечной нагрузки в участках до

и после сечения, в котором приложена сила, равна нулю, а приращение прогиба в сечении $\ell/2$ будет

$$\delta\upsilon = \frac{P\left(z - \frac{\ell}{2}\right)^3}{6 \cdot E \cdot I}. \tag{2.32}$$

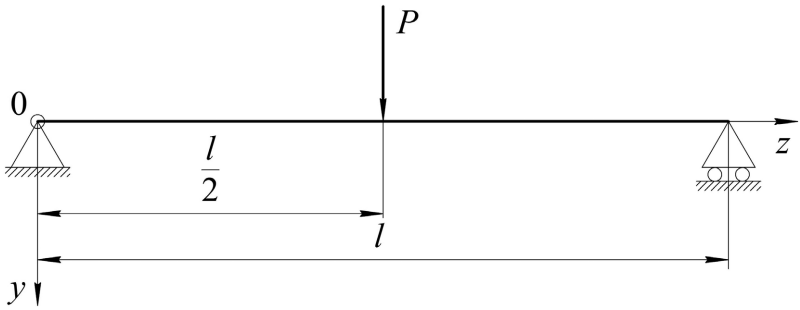

Рисунок 2.2 — Шарнирно опёртая балка, загруженная поперечным усилием в серединном сечении

Для такой балки общее уравнение упругой линии можно записать так:

$$\upsilon = \frac{N_0 z^3}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{M_0 z^2}{2 \cdot E \cdot I} + \theta_0 z + f_0 + \left\| {}_{\ell/2} \frac{P}{6 \cdot E \cdot I}\left(z - \frac{\ell}{2}\right)^3 \right. . \tag{2.33}$$

Принимая во внимание, что по условиям закрепления левого конца балки M_0 и f_0 обращаются в нуль, а из уравнения статики реакция левой опоры, равная перерезывающей силе на левой опоре N_0, равная $P(\ell - \ell/2)^3/\ell$, находим θ_0 из условия равенства нулю прогиба на правом конце:

$$\theta_0 = \frac{P\ell^2}{16 \cdot E \cdot I}. \tag{2.34}$$

Подставляя N_0 и θ_0 в уравнение (2.33), получим окончательное выражение упругой линии шарнирно опёртой балки, нагруженной сосредоточенной силой в середине пролёта:

$$\upsilon = \frac{P \cdot \ell^3}{16 \cdot E \cdot I}\left[\frac{z}{\ell} - \frac{4}{3}\frac{z^3}{\ell^3} + \left\| {}_{\ell/2} \frac{8}{3}\left(\frac{z}{\ell} - \frac{1}{2}\right)^3 \right.\right]. \tag{2.35}$$

Величина максимального прогиба υ_{max}, м, приходящегося на середину пролёта балки, равна

$$\upsilon_{max} = \frac{P \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I}. \tag{2.36}$$

Для однопролётной балки с различными закреплениями сформированы таблицы параметров изгиба, в которых приведены формулы для нахождения реакций опор, функций распределения изгибающих моментов, прогибов, углов поворота сечений по длине балки, использование этих формул в расчётах существенно упрощает процесс нахождения параметров НДС простых балочных систем.

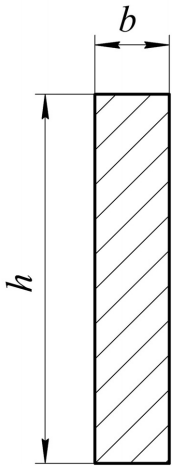

Рисунок 2.3 — Поперечное сечение расчётной балки

Для примера зададим значения P, E и ℓ, а также характеристики поперечного сечения. Используя полученные формулы, а также пользуясь таблицами изгиба однопролётной шарнирно опёртой балки, найдём параметры НДС заданной расчётной схемы.

Поперечное сечение балки выберем в виде прямоугольника высотой h и шириной b (рисунок 2.3). Говоря о балках, имеют в виду тела, один размер которых много больше двух других размеров. В случае простого изгиба призматических тел основным характерным размером сечения является высота (для тавровых, швеллерных, двутавровых профилей говорят о высоте стенки), следует выбирать значения h и L так, чтобы соблюдалось условие $L / h = 20$, так как при уменьшении этого значения влияние касательных напряжений возрастает. Считать такую балку методами технической теории изгиба балки (2.37) было бы ошибочно. Учитывая вышесказанное, примем за расчётную балку с характеристиками, представленными в таблице 2.1.

Таблица 2.1 — Характеристики расчётной балки

Наименование	Обозначение	Единица	Значение
Сосредоточенная сила	P	Н	1000
Модуль нормальной упругости (модуль Юнга)	E	Па	$2 \cdot 10^{11}$
Ширина сечения балки	b	м	0,005
Высота сечения	h	м	0,05
Длина балки	L	м	1

Найдём момент инерции сечения I, м^4, относительно горизонтальной оси, проведённой через центр тяжести сечения:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = 5.208 \cdot 10^{-8}. \tag{2.37}$$

Воспользовавшись формулой (2.36), найдём прогиб υ_{max}, м:

$$\upsilon_{max} = \frac{PL^3}{48 \cdot E \cdot I} = \frac{1000 \cdot 1}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5.208 \cdot 10^{-8}} = 2 \cdot 10^{-3}. \tag{2.38}$$

В технической теории изгиба балок описаны зависимости для определения таких характеристик НДС балки, как изгибающие моменты, напряжения в различных плоскостях и т.д. Однако выбранное нами ПО «Логос» находится в состоянии разработки и пока не имеет возможности определения прочих характеристик НДС балочного элемента (который логичнее всего использовать для задач данного класса). Потому ограничимся возможностью расчета прогиба балки для оценки точности численного расчета и его сходимости с аналитическими зависимостями.

3 РЕШЕНИЕ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ С ИЗВЕСТНЫМ АНАЛИТИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ

3.1 СОЗДАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В пакете ПО «Логос» имеются два пути ввода геометрической модели:

1) импорт готовой геометрической модели в формате, поддерживающемся ПО «Логос»;

2) создание геометрической модели, используя возможности ПО «Логос».

Для импорта готовой геометрической модели, используя интерфейс ПО «Логос ПреПост» версии 5.3.18, необходимо создать модель в модуле «Логос Гибрид», для этого необходимо выбрать «Модель» → «Новая модель» → «Логос Гибрид». При этом в окне «Панель управления» появится «Древо модели», далее необходимо выбрать раздел «Компоненты» и, нажав на нем правой кнопкой мыши, выбрать в развернувшемся контекстном меню пункт «Загрузить геометрическую модель». В появившемся диалоговом окне необходимо указать путь к файлу геометрической модели, поддерживающийся ПО «Логос». После выбора необходимого файла под «Древом модели» появится окно «Загрузка геометрии», в котором появится возможность настройки некоторых параметров загрузки модели, одним из которых является «Масштабирование». Выбрав необходимые настройки и масштаб, нужно нажать кнопку «Выполнить операцию», которая изображена в виде зелёной галочки. Данные операции приведут к созданию в «Древе модели» в пункте «Компоненты» импортируемой геометрической модели, название которой сообразно названию исходного файла.

Для создания геометрической модели, используя возможности ПО «Логос», необходимо также создать модель в модуле «Логос Гибрид», для этого необходимо выбрать «Модель» → «Новая модель» → «Логос Гибрид». Далее необходимо создать компонент, для этого выбрав раздел «Компоненты», и, нажав на нем правой кнопкой мыши, выбрать в появившемся контекстном меню пункт «Создать компонент». В «древе модели» в пункте «Компоненты» появится новый компонент, который можно переименовать и настроить параметры его отображения в «Окне визуализации».

Воспользуемся вторым способом и создадим геометрическую модель однопролётной шарнирно опёртой балки. Создадим компонент и назовём его «Балка_1». В среде ПО «Логос» смоделировать балку можно тремя способами:

1) создать одномерное, линейное тело (в среде ПО «Логос» такое тело носит название «Ребро»), предполагая в дальнейшем использовать декомпозицию (конечно-элементную сетку) в виде совокупности одномерных линейных конечных элементов балочного типа и задать геометрические характеристики его поперечного сечения;

2) создать модель балки, используя двумерные, оболочечные тела (в среде ПО «Логос» такие тела носят название «Грань»), предполагая в дальнейшем использовать для создания конечно-элементной сетки оболочечные элементы;

3) создать модель балки, используя объёмные тела, предполагая использование конечно элементной сетки из совокупности объёмных элементов.

Построение геометрической модели балки любым из трёх способов является несложной задачей, в среде ПО «Логос» имеется большой набор операций по созданию и редактированию рёбер, граней, объёмов. Например, возвращаясь к задаче о шарнирно опёртой однопролётной балке, расчётную схему балки можно смоделировать одним ребром, одной гранью или объёмным телом. Однако выбор способа создания геометрической модели влияет на выбор типа конечно-элементной сетки, создаваемой на её основе, что может в значительной степени повлиять на точность и скорость получения результатов расчёта.

Инженер должен уметь выбирать наиболее подходящий способ моделирования и построения конечно-элементной сетки. Практика расчётов с применением ПО на основе МКЭ позволяет дать следующие рекомендации:

1) количество линейных элементов, моделирующих однопролётную (или консольную) балку, следует выбирать не менее 5, распределённых по балке равномерно. Это позволит получить чёткое представление о деформации конструкции, характере распределения полей напряжений и позволит заметить недочёты моделирования, затратив небольшое количество времени и вычислительных мощностей;

2) при использовании двух- и трёхмерных элементов длины граней следует выбирать как величины одного порядка, это поможет избежать острых углов между гранями и вытянутых элементов, что положительно скажется на точности расчёта;

3) регулярная сетка предпочтительнее, чем произвольная сетка;

4) при одинаковой длине сторон элементов квадратичная или кубическая сетка предпочтительнее, чем треугольная или тетраэдрическая сетка;

5) при составлении объёмных моделей для экономии времени с сохранением приемлемой точности расчёта параметров НДС следует увеличивать размер конечного элемента вдали от закреплений, концентраторов напряжений или других геометрически сложных участков конструкции, вблизи которых следует уменьшить размер конечного элемента. Это позволит соблюсти принцип Сен-Венана: две статически эквивалентные системы сил создают одно и то же поле напряжений на расстоянии от их точек приложения большем, чем характерный линейный размер поперечного сечения.

Учитывая вышеописанные понятия и рекомендации, создадим геометрические модели однопролётной шарнирно опёртой балки, на их основе построим конечно-элементные сетки.

При вводе исходных данных, геометрических характеристик материала, внешние нагрузки, граничные условия должны задаваться в одной системе измерений; в рамках данного практикума используется система СИ.

Построим геометрическую модель балки, используя ребра и балочные конечные элементы. Для этого выберем в древе модели «Логос Гибрид» созданный компонент и в окне операций, находящемся правее от древа модели, выберем раздел «Операции с геометрией». Ниже выберем «Создание вершин», ещё ниже выберем кнопку «Создание вершин по координатам», под древом модели появится окно мастера выполнения операций, с помощью которого создадим две точки по координатам, заданным в таблице 3.1.

После создания точек необходимо построить ребро. Для этого в разделе «Геометрия» выберем пункт «Создание рёбер» → «Создание ребра: по двум вершинам». После

чего соединим точки № 1 и 2, получив геометрическую модель балки с использованием одномерного тела, ребра.

Таблица 3.1 — Координаты точек для расчётной балки

Номер точки	Координата *x*, м	Координата *y*, м	Координата *z*, м
1	0,0	0,0	0,0
2	0,5	0,0	0,0

3.2 СОЗДАНИЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ СЕТКИ

Для создания конечно-элементной сетки на основе полученной геометрической модели необходимо в разделе «Компоненты» выбрать компонент «Балка» и в разделе «Операции с сеткой» выбрать пункт «Построение 1*d* сетки» → «Построение 1*d* сетки». Выберем построенное ребро. Вид распределения — равномерный. Выберем число разбиений равное 20, либо выбрав возможность варьирования размера разбиения введём 0,025, выполнив операцию, получим конечно-элементную модель из 20 балочных конечных элементов. Для продолжения расчёта НДС балки необходимо перейти в модуль ПО «Логос Прочность». Для этого сохраним конечно-элементную модель, выбрав меню «Модель» → «Сохранить» → «Сетку». В появившемся диалоговом окне введём имя «*Balka*_1» и выберем тип файла «файлы сеток (*.*k*)». Рекомендуется использовать в названии латинские символы и/или цифры, чтобы избежать ошибки импорта файла сеток.

Для создания новой модели необходимо в главном меню выбрать «Модель» → «Новая модель» → «Логос Прочность». В появившемся диалоговом окне «Параметры расчётной задачи» выберем ту же директорию, в которой находится файл сетки «*Balka*_1.*k*».

Импортируем конечно-элементную модель, для этого в древе модели «Логос Прочность» выбрать раздел «Детали», нажав правой кнопкой мыши, выбрать в контекстном меню пункт «Импортировать сетку». В появившемся окне необходимо указать путь к файлу «*Balka*_1.*k*». В разделе «Детали» появится пункт «*Balka*_1» с подпунктами «Геометрия» и «Сетка (*k*)», нажмём правой кнопкой мыши на подпункт «Сетка (*k*)» и выберем пункт «Создать подобласти».

3.3 ЗАДАНИЕ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

Для задания свойств материала в древе модели необходимо выбрать раздел «Материалы», нажав на нём правой кнопкой мыши, в появившемся контекстном меню выбрать пункт «Добавить». В дереве модели в разделе «Материалы» появится пункт «Материал_1». Открыв его двойным кликом, увидим окно задания свойств материала.

В поле «Имя материала» зададим наименование «*S_Steel*». В поле «Доступные свойства», развернув списки «Основные» и «Модели деформирования» → «Упругие» и поставив галочки напротив свойств «Плотность» и «Изотропная», зададим свойства, представленные в таблице 3.2.

Таблица 3.2 — Характеристики материала расчётной балки

Наименование	Обозначение	Единица	Значение
Плотность	ρ	кг/м^3	7850
Модуль нормальной упругости (модуль Юнга)	E	Па	$2 \cdot 10^{11}$
Коэффициент Пуассона	η	–	0,3

3.4 ЗАДАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСЧЁТА

Для задания параметров расчёта в древе модели необходимо выбрать раздел «Задача» и в мастере выполнения операций в графе «Тип расчёта» выбрать пункт «Статическая прочность».

Далее необходимо выбрать тип элемента, в разделе «Параметры счётных модулей», дважды кликнуть по разделу «Свойства подобластей». В открывшемся диалоговом окне «Свойства подобласти» сначала необходимо создать набор данных, необходимо нажать кнопку «добавить», выбрать подобласть «*Balka*_1» и добавить к набору справа. После в ставшем активным меню «Материал» выбрать ранее созданный материал «*S_Steel*», тип элемента — «Балочный» (балочный, улучшенный, 2-узловой).

Далее для балочного элемента необходимо задать характеристики поперечного сечения. Для этого нажмём кнопку «Задать» и в открывшемся окне «Параметры сечения балки» во вкладке «Выбор» зададим прямоугольное сечение (Тип: *BAR* в выпадающем списке). Ниже появится схематичное изображение сечения с обозначениями используемых ПО размеров сечений, «*D*1» — ширины балки, «*D*2» — высота балки. Характеристики сечения представлены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 — Характеристики сечения расчётной балки

Параметр сечения	Значение, м
*D*1	0,005
*D*2	0,050

Применив введённые параметры, заметим, что в ранее пустых полях характеристик сечения появились рассчитанные по исходным данным значения.

Далее необходимо задать ориентацию балочного элемента, для этого поставим галочку в разделе «Ориентация», выберем пункт «Задана вектором» и определим направляющий вектор. Вектор должен быть выбран так, чтобы его направление совпадало с осью «*t*», а значит, направляющий вектор будет иметь вид (0,0,1). Сохраним введённые данные, нажав кнопку «Применить».

3.5 ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

В древе модели необходимо развернуть раздел «Граничные условия» → «Механика» → «Закрепления», нажать на пункте «Закрепление в узлах» правой кнопкой мыши и выбрать в контекстном меню пункт «Добавить», при этом изменив количество создаваемых условий со стандартного 1 на 2. Далее, выбрав каждое условие в панели мастера операций, необходимо задать параметры закреплений.В рамках данной задачи для параметров «Система координат» и «Масштаб» используются стандартные значения.

Параметры «По *X*», «По *Y*», «По *Z*» отвечают за запрет перемещений узла в направлении соответствующих осей. Параметры «По *RX*», «По *RY*», «По *RZ*» отвечают за запрет поворота узла относительно соответствующих осей. Для запрета перемещений по какой-либо степени свободы необходимо поставить галочку в поле «Значение» для соответствующего параметра. Значения параметров для первого условия, моделирующего закрепление балки в начальном сечении, и второго условия, моделирующего закрепление балки в конечном сечении, представлены в таблице 3.4.

Таблица 3.4 — Условия закреплений крайних сечений расчётной балки

Параметр	Начальное сечение	Конечное сечение
«Идентификатор узла»	1	21
«По *X*»	закреплено	свободно
«По *Y*»	закреплено	закреплено
«По *Z*»	закреплено	закреплено
«По *RX*»	закреплено	закреплено
«По *RY*»	закреплено	закреплено
«По *RZ*»	свободно	свободно

3.6 ЗАДАНИЕ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ

Для задания нагрузки в древе модели необходимо развернуть разделы «Нагрузки» → «Механика» → «Сила», на разделе «Сила, приложенная к узлу» нажать правой кнопкой мыши и, выбрав пункт «Добавить», создать одно условие нагружения.

Выбрав созданное условие, необходимо задать параметры нагружения соответственно значениям, представленным в таблице 3.5.

Таблица 3.5 — Условия нагружения расчётной балки

«Идентификатор узла»	11
Степень свободы	Нагрузка в направлении оси *y*
Тип	Константа
Константа	1000
Коэффициент пересчёта значений	1

3.7 ЗАПУСК РАСЧЁТА ЗАДАЧИ

Перед запуском расчёта необходимо сохранить модель. Для этого необходимо в главном меню выбрать «Модель» → «Сохранить» → «Модель». В появившемся диалоговом окне «Выбор файла для экспорта модели» выбираем рабочую папку и в поле «Имя файла» вводим «*Balka*_1». После этого запускаем расчёт нажатием кнопки «Запустить расчётную задачу» на панели инструментов.

3.8 ОБРАБОТКА ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты расчёта ПО «Логос Прочность» сохраняет в файлы результатов в формате «*.*efr*» в папке с именем модели. Каждому шагу нагружения соответствует отдельная папка, имя которой заканчивается номером шага. Для корректного расчёта в начальный момент времени (на первом шаге нагружения) ПО «Логос Прочность»

необходимо нулевое значение внешней нагрузки. Так как при задании значения внешней нагрузки была выбрана константа, отличная от нуля (в данном случае 1000), ПО «Логос Прочность» создал шаг нагружения с нулевым значением перед расчётом действительной нагрузки.Для просмотра результатов ПО «Логос» использует визуализатор *ScientificView*, который можно запустить из окна ПО «Логос ПреПост», нажав на соответствующую кнопку на панели инструментов.

Откроем файл результатов второго шага нагружения «...*Balka*_1*Balka*_1.*RESULTS**EFR_CUT**Balka*_1_001*Balka*_1_001.*efr*».

Визуализатор *ScientificView* при работе с балочными элементами имеет возможность отобразить лишь осевую нагрузку «*Beam Axial Force*», в данной задаче осевые нагрузки и напряжения неактуальны, так как из-за их малости в технической теории балки их не рассматривают при простом изгибе. Не имея возможности судить о напряжениях в балочной модели, мы можем отобразить перемещения узлов, что позволит отобразить нейтральную ось и судить о прогибе балки.

Для этого на панели управления в левой части экрана, под разделом «Элементы сцены» во вкладке «Отображение» выберем параметр «В узлах», из списка ниже выберем пункт «*Displ_Y*» и нажмём кнопку «Отобразить», чтобы отобразить перемещения по оси *Y*. Для того чтобы увидеть поле перемещений, а не только силуэт балки, необходимо удостовериться, что в меню «Вид» → «Режим визуализации» отключена опция «отображать сетку с помощью линий».

В результате проделанных операций мы увидим картину перемещений узлов сетки балки (а точнее, построенную по этим перемещениям аппроксимацию нейтральной оси балки).

3.9 ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РАСЧЁТА

Для определения точности расчёта и достоверности модели необходимо провести верификацию, для этого сравним результаты расчёта аналитического и численного расчётов и определим точность численного расчёта.

Согласно ст. 3.30 ГОСТ Р 57700.10 точность (в процентах) численного расчёта относительно аналитического определяется как

$$\bar{\Delta} = \frac{\upsilon_ч - \upsilon_а}{\upsilon_ч} \cdot 100, \tag{3.1}$$

где $\upsilon_ч$ — прогиб серединного сечения балки при численном расчёте, м; $\upsilon_а$ — прогиб серединного сечения балки при аналитическом расчёте, м.

Результаты верификации приведены в таблице 3.6.

Таблица 3.6 — Результаты верификации с известным аналитическим решением

Аналитический расчёт, мм	Численный расчёт, мм	Разница, %
2,000	2,000	0

4 ОБЗОР ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ С ИЗВЕСТНЫМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ РЕЗУЛЬТАТОМ

4.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ОДНОПРОЛЁТНОЙ ШАРНИРНО ОПЁРТОЙ БАЛКИ С КОНСОЛЯМИ

Рассмотрим задачу об изгибе балки с известным экспериментальным результатом. Балка имеет тавровое сечение и является однопролётной шарнирно опёртой с консолями. Схема задачи приведена на рисунке 4.1. Поперечное сечение расчётной балки приведено на рисунке 4.2.

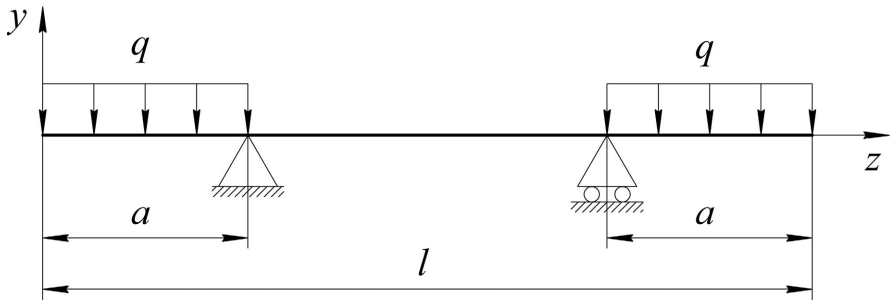

Рисунок 4.1 — Схема задачи

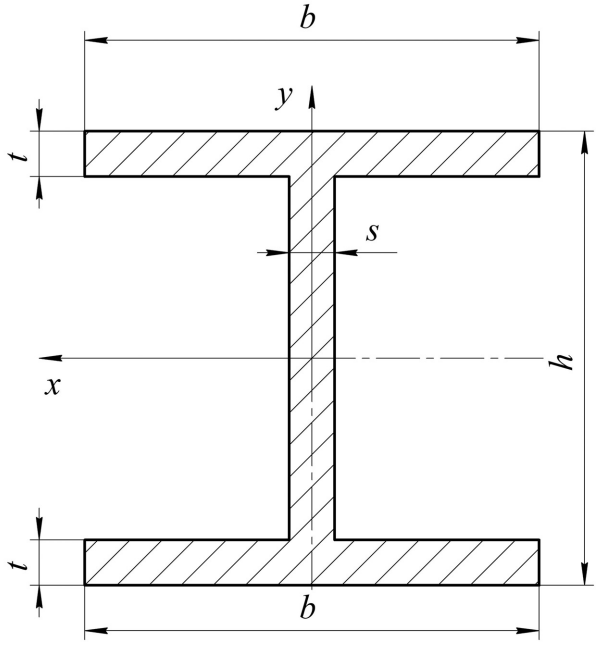

Рисунок 4.2 — Поперечное сечение расчётной балки

Размеры и значение внешней нагрузки приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 — Параметры задачи

Величина	Обозначение	Единица	Значение
Модуль нормальной упругости (модуль Юнга)	E	Па	$2{,}0684 \cdot 10^{11}$
Момент инерции сечения	I_x	м^4	$3{,}285 \cdot 10^{-3}$
Ширина стенки сечения балки	s	м	0,0174
Высота сечения балки	h	м	0,762
Длина балки	ℓ	м	12,192
Длина консоли	a	м	3,048
Ширина сечения балки	b	м	0,381
Толщина полки сечения балки	t	м	0,0266

4.2 РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

По результатам эксперимента, максимальное значение прогиба, приходящееся на середину пролёта балки, составило 4,623 мм.

5 РЕШЕНИЕ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ С ИЗВЕСТНЫМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ РЕЗУЛЬТАТОМ

5.1 СОЗДАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Создадим модель однопролётной шарнирно опёртой балки с консолями в ПО «Логос», начав с составления геометрической модели в модуле «Логос Гибрид». Создадим 2 точки, описывающие начальное и конечное сечения балки, и ещё 2 точки, описывающие опорные сечения балки. Координаты задаваемых точек приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1 — Координаты точек модели балки

Номер точки	Координата *X*, м	Координата *Y*, м	Координата *Z*, м
1	–0,000	0,000	0,000
2	–3,048	0,000	0,000
3	–9,144	0,000	0,000
4	12,192	0,000	0,000

Последовательно соединим точки, создавая между ними ребра, тем самым завершив создание геометрической модели.

5.2 СОЗДАНИЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ

Пролёт между опорами равномерно разобьём на 10 ячеек. Равномерно разобьём каждую нагружаемую консоль на 19 ячеек. Далее с помощью опции «Объединить узлы» произведём слияние смежных узлов консолей и пролёта балки. Сохраним полученную модель в файле «*balka_con.k*».

Импортируем конечно-элементную сетку в модуль «Логос Прочность».

5.3 ЗАДАНИЕ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

Далее зададим параметры материала, аналогично предыдущей задаче, по таблице 3.2.

5.4 ЗАДАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСЧЁТА

Выберем тип решаемой задачи — «Статическая прочность». В разделе «Статическая прочность» создадим набор, в который включим единственную созданную часть «*Part*1» со стандартными настройками счета. В разделе «Свойства подобластей» создадим набор балочных элементов со свойствами созданного ранее материала, зададим поперечное сечение балки с типом сечения — *I*. Характеристики

поперечного сечения приведены в таблице 5.2. Ориентацию сечения зададим вектором (0,0,1).

Таблица 5.2 — Характеристики поперечного сечения расчётной балки

Параметр	Значение, м
*D*1	0,3810
*D*2	0,0266
*D*3	0,0174
*D*4	0,7620

Создадим набор узлов, в котором позже будем задавать внешнюю нагрузку. Для этого создадим набор с названием «*nagruzka*», добавим в него узлы, принадлежащие только консольным частям балки, это узлы под номерами 12–49. Создадим в разделе «Нагрузка» силу, приложенную к набору, в которой идентификатором будет набор «*nagruzka*», а константа равна минус 23410 Н.

Далее зададим граничные условия, для этого создадим закрепления в узле 1, оставив свободным лишь параметр «по *RZ*», и закрепление в узле 11, со свободными параметрами «по X» и «по *RZ*».

5.5 ЗАПУСК РАСЧЁТА ЗАДАЧИ

Перед запуском расчёта необходимо сохранить модель. Для этого необходимо в главном меню выбрать «Модель» → «Сохранить» → «Модель». В появившемся диалоговом окне «Выбор файла для экспорта модели» выбираем рабочую папку, и в поле «Имя файла» вводим «*Balka*_2». После этого запускаем расчёт нажатием кнопки «Запустить расчётную задачу» на панели инструментов.

5.6 ОБРАБОТКА ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для просмотра результатов воспользуемся визуализатором *ScientificView*. Откроем файл «...*Balka*_2*Balka*_2.*RESULTS**EFR_CUT**Balka*_2_001*Balka*_2_001.*efr*.». Выберем отображаемой величиной в узлах перемещения по оси *Y* «*Displ_Y*». Максимальное значение перемещения, расположенное посередине пролёта балки, имеет значение 4,919 мм.

5.7 ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РАСЧЁТА

Для определения точности расчёта и достоверности модели необходимо провести верификацию, для этого сравним результаты расчёта численного расчёта и результаты эксперимента и определим точность численного расчёта.

Воспользуемся формулой (3.1) и терминологией, описанной в разделе 3.9. Результаты верификации приведены в таблице 5.3.

Таблица 5.3 — Результаты верификации с известным экспериментальным результатом

Максимальное значение прогиба, численный расчёт, мм	Максимальное значение прогиба, эксперимент, мм	Разница, %
4,919	4,623	6

Стоить напомнить, что при приложении распределённой нагрузки нам пришлось обойти ограничения возможностей ввода распределённой нагрузки ПО «Логос» и приложить её дискретно с небольшим отступом от опорного сечения и небольшим концентрированием нагрузки для нивелирования влияния данного допущения. В небольших масштабах перемещений, фигурирующих в этой задаче, это могло повлиять на конечный результат.

6 ОБЗОР ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

6.1 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПЕРЕКРЫТИЯХ

Перекрытием называется система пересекающихся балок, скреплённых между собой в узловых точках, предназначенная воспринимать нагрузку, действующую перпендикулярно плоскости, образованной этими балками. В типовых судовых и авиационных конструкциях чаще всего встречаются перекрытия, балки которых пересекаются под прямыми углами. Также обычно они имеют настил, лист металла, связанный с системой балок; такая конструкция передаёт на опорный контур давление окружающей среды (бортовые конструкции) или вес закреплённого оборудования, груза, людей (палубы, лёгкие настилы).

Балки, образующие перекрытия, принято разделять на балки главного направления (БГН) и перекрёстные связи (ПС). Направление, параллельно которому идёт большее число балок, называется главным направлением, а соответствующие ему балки — балками главного направления. Балки, закреплённые перпендикулярно БГН, называются перекрёстными связями.

Задача расчёта НДС перекрытия сводится к определению элементов изгиба БГН, ПС и НДС участка настила в случае приложения распределённого давления. Локальную задачу об изгибе пластины в данном практикуме рассматривать не будем и сконцентрируемся на расчёте НДС балочной системы перекрытия.

Действующая на перекрытие нагрузка одновременно воспринимается БГН и ПС, так как балки связаны в узлах пересечения, изгиб БГН влияет на изгиб ПС, и наоборот. Рассмотрим один из узлов перекрытия.

Пусть A и B — пересекающиеся балки различных направлений, как показано на рисунке 6.1, *а*.

При изгибе балки B сечение её, совпадающее с узлом ab, должно повернуться на некоторый угол. Этому процессу будет препятствовать балка A, скрепленная в этом сечении с балкой B. Вследствие этого в узловом сечении ab на балку B будет действовать изгибающий момент M_a, а на балку A — равный этому моменту, но противоположно направленный крутящий момент (рисунок 6.1, *б*).

Аналогичная картина наблюдается при изгибе балки A, в результате чего в этом сечении на балку B действуют изгибающий момент M_b и равный ему противоположно направленный крутящий момент (рисунок 6.1, *в*).

Если балки A и B не были связаны друг с другом, то вследствие различной жёсткости и различной величины нагрузки, воспринимаемой ими, вертикальные перемещения обоих сечений были бы разными по величине. Наличие же жёсткого соединения в узловых сечениях приводит к уравнению перемещений, что вызывает появление вертикального усилия R.

При изгибе перекрытия в узлах пересечения балок обоих направлений, кроме указанных выше реактивных усилий, будут возникать ещё и силы R_A и R_B, препят-

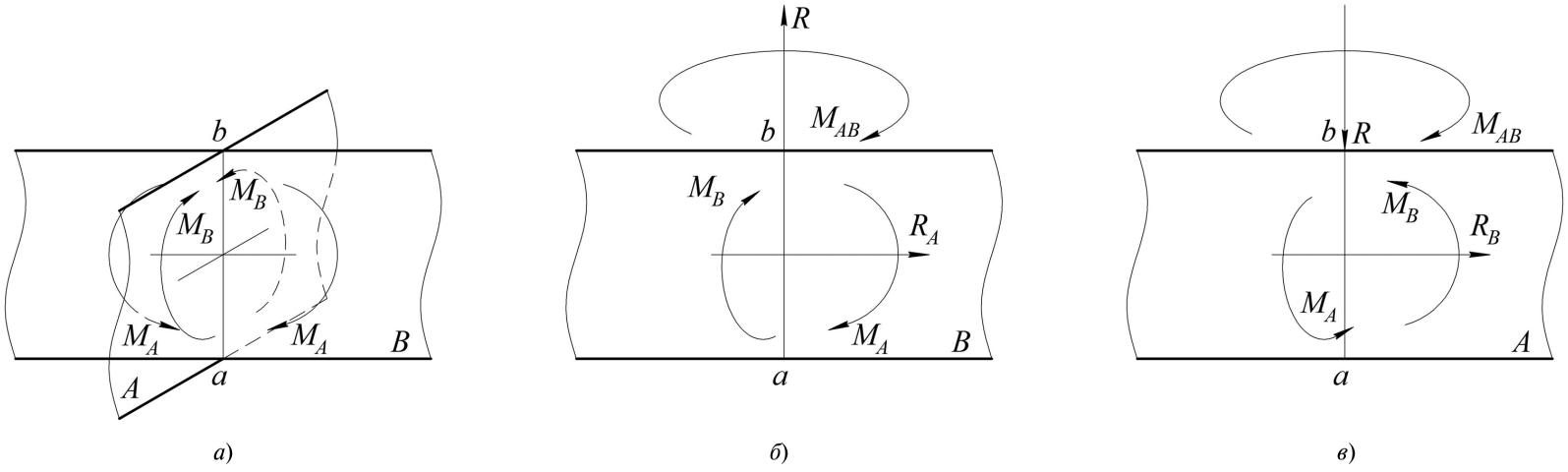

Рисунок 6.1 — Узел пересечения балок перекрытия:
а — узел пересечения балок *A* и *B*; *б* — воздействия на балку *B*; *в* — воздействия на балку *B*

ствующие перемещению балок в плоскости, параллельной плоскости перекрытия, и момент M_{AB}, вектор которого перпендикулярен этой поверхности.

Однако в том случае, когда одна из главных плоскостей изгиба балок нормальна к плоскости перекрытия, а внешняя нагрузка, действующая на перекрытие, так же перпендикулярна к этой плоскости (что практически всегда имеет место), величина этих усилий оказывается ничтожно малой и при расчёте перекрытия силами R_A, R_B и моментом M_{AB} можно пренебречь.

Рассмотрим реактивные моменты M_A и M_B. Допустим, балка B свободно оперта по концам и загружена равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью q, длина балки ℓ. Предположим, что балка A пересекает балку B на расстоянии $\ell/3$ от опоры, длина L балки A равна $1{,}5\ell$ и расстояние от ее опоры до пересечения с балкой B равно $L/2 = 0{,}75\ell$. Размеры поперечных сечений на рисунке 6.2 указаны в миллиметрах.

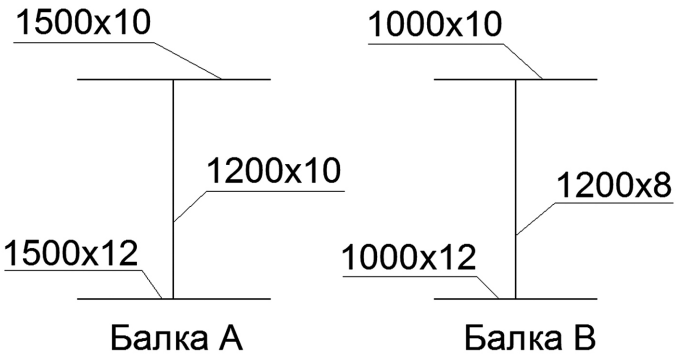

Рисунок 6.2 — Характеристики перечных сечений балок A и B

Сравним величины M_A и изгибающий момент балки B в узле пересечения.

Изгибающий момент от равномерной нагрузки в сечении $\ell/3$ равен

$$|M|_{z=\frac{\ell}{3}} = \frac{q\cdot\ell^2}{2}\left[\frac{z}{\ell}-\left(\frac{z}{\ell}\right)^2\right]_{z=\frac{\ell}{3}} = \frac{q\cdot\ell^2}{9}. \tag{6.1}$$

Предположим, что узловое сечение балки B повернулось на угол α, равный

$$\alpha = \frac{q\cdot\ell^3}{24\cdot E\cdot I}\left[1-6\cdot\left(\frac{z}{\ell}\right)^2+4\cdot\left(\frac{z}{\ell}\right)^3\right]_{z=\frac{\ell}{3}} = \frac{13\cdot\ell\cdot|M|_{z=\frac{\ell}{3}}}{72\cdot E\cdot I}, \tag{6.2}$$

где I — момент инерции поперечного сечения балки B, м^4.

Для того чтобы узловое сечение балки A повернулось на этот же угол, к этому сечению должен быть приложен крутящий момент M_A (для каждой половины балки момент $M_A/2$), равный

$$M_A = 2\cdot C\frac{\alpha}{\left(\frac{L}{2}\right)} = \frac{13\cdot C\cdot\ell\cdot|M|_{z=\frac{\ell}{3}}}{18\cdot E\cdot I\cdot L}, \tag{6.3}$$

$$C = \frac{G}{3}\sum_i a_i\cdot t_i^3, \tag{6.4}$$

где C — коэффициент жёсткости профиля на кручение, м^4; a_i — длинная сторона пластины, входящей в состав поперечного сечения профиля, м; t_i — толщина соответствующей пластины, м; G — модуль сдвига, Па.

Найдём соотношение между моментами M_A и $|M|_{z=\ell/3}$. Из формулы (6.3) получим:

$$\frac{|M|_{z=\ell/3}}{M_A} = \frac{18 \cdot E \cdot I \cdot L}{13 \cdot \ell \cdot C}. \tag{6.5}$$

Произведя расчёты необходимых величин, представленных в таблице 6.1, подставим их значения в (6.5).

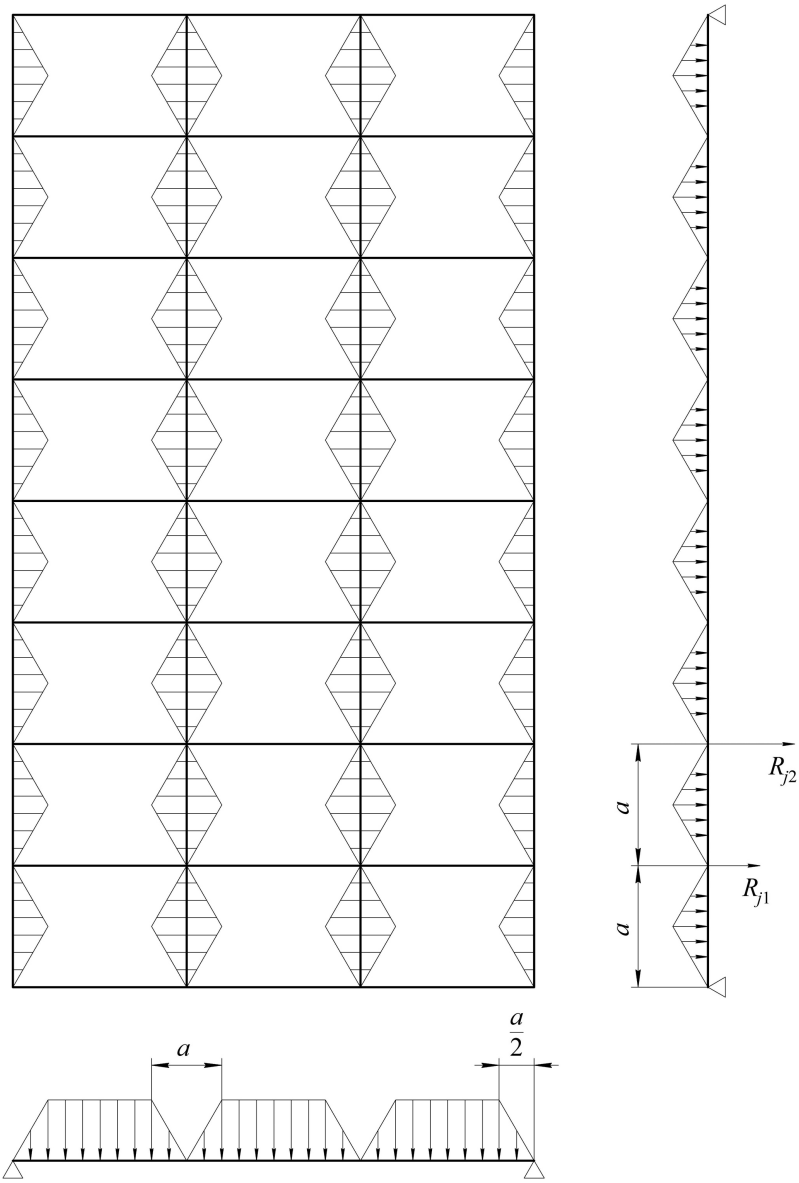

Рисунок 6.3 — Распределение нагрузок в перекрытии

Таблица 6.1 — Расчётные величины для перекрытия

Наименование	Обозначение	Единица	Значение
Момент инерции поперечного сечения балки *B*	*I*	м^4	$904 \cdot 10^3$
Коэффициент	C	–	$529 \cdot E/7{,}8$

Далее получим:

$$\frac{|M|_{z=\ell/3}}{M_A} = \frac{18 \cdot 904 \cdot 10^3 \cdot 1{,}5 \cdot 7{,}8}{13 \cdot 529} = 27{,}8 \cdot 10^3. \qquad (6.6)$$

Приведённый пример показывает, что изгибающий момент от нагрузки *M*, действующей в узловом сечении, значительно превосходит момент M_A противодействия балки *A*. Такая же картина складывается при рассмотрении момента M_B в балке *B*.

На основании вышесказанного можно прийти к выводу, что при расчёте перекрытий, состоящих из балок, у которых жёсткость на кручение много меньше жёсткости на изгиб, без большой погрешности изгибающими моментами M_A и M_B можно пренебречь. Чего нельзя сказать, например, о перекрытиях из коробчатых и других замкнутых профилей. Однако из-за малой распространённости таких перекрытий в судостроении в рамках данного практикума говорить о них мы не будем.

В приведённом выше примере рассматриваемые моменты возникали от внешних нагрузок, воспринимаемых как БГН, так и ПС, о чем было сказано при определении термина «перекрытие». Вопрос распределения нагрузок в перекрытии, учитывая наличие настила, сложен. Однако наличие в перекрытии большого числа БГН позволяет нам сделать некоторые предположения, значительно облегчающие расчёт. В таком случае из-за большого количества БГН и малого отношения расстояния между ними к их длине нагрузка, воспринимаемая ПС, невелика по сравнению с нагрузкой, воспринимаемой БГН.

Тогда, при достаточном количестве БГН, можно говорить о том, что вся нагрузка на перекрытие воспринимается только лишь БГН.

Рассмотрим такое перекрытие, на плоскости которого действует распределённое давление *P*. Тогда с достаточной для практических расчётов точностью можно считать, что ПС воспринимают ту часть нагрузки, которая приходится на площади, заштрихованные горизонтально, а остальная нагрузка воспринимается БГН. Тогда, если из всех сил взаимодействия балок обоих направлений учитывать лишь вертикальную силу $\bar{R}_{ji}$ (о чем было сказано выше на примере балок *A* и *B*), то любая *i*-я БГН будет нагружена так, как показано на рисунке 6.4, *а*, а *j*-я ПС — как показано на рисунке 6.4, *б*.

Предположив, что вся внешняя нагрузка воспринимается только БГН, ПС будут загружены только вертикальными реакциями, причём значения реакций будут больше, чем эти же реакции в случае загрузки ПС.

Погрешность такого подхода вычислена на основе рассмотрения балки на двух опорах, загруженной сосредоточенной силой, и такой же балки, загруженной распределённой на небольшом участке в районе того же сечения, в котором загружена первая балка. В результате погрешность не превышает значения $(1/m^2) \cdot 100\%$, что уже при 5 БГН даёт погрешность всего в 4%.

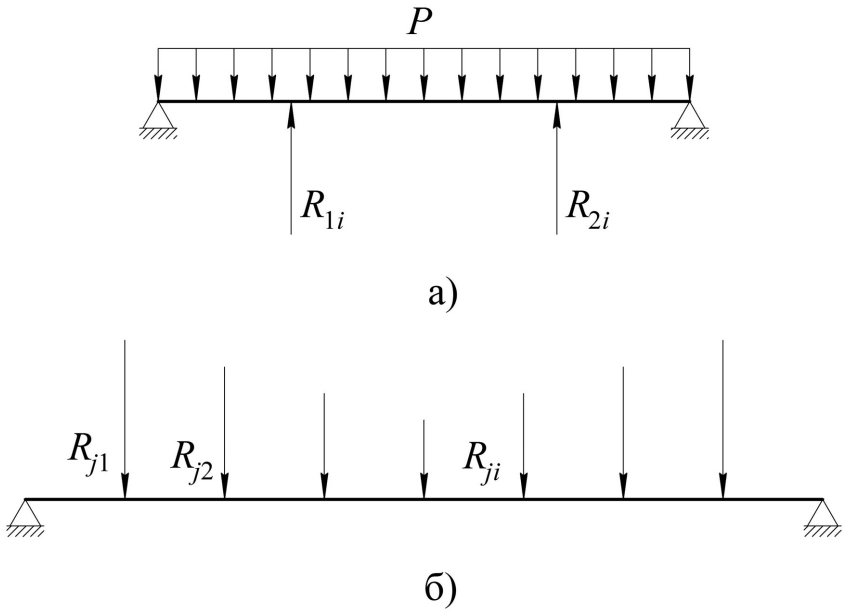

Рисунок 6.4 — Нагрузки, воспринимаемые БГН (*а*) и ПС (*б*)

Расчёт перекрытий с меньшим количеством БГН и ПС обычно сводится к раскрытию статической неопределимости системы путём приравнивания стрелок прогиба балок в сечениях, соответствующих точке пересечения, и к решению НДС однопролётной балки. Для большого количества перекрытий с большим количеством балок составлены алгоритмы расчёта для различных схем награждения, учитывающие вышеописанные упрощения и предположения. Также существует большое число приближенных численных методов решения.

6.2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НДС ПРОСТЕЙШЕГО ПЕРЕКРЫТИЯ

В качестве примера рассмотрим перекрытие, состоящее из 5 БГН и 1 ПС, разделяющей БГН на равные части. Расчётная схема перекрытия показана на рисунке 6.5.

Все балки шарнирно опёрты на жёсткий контур. Расчёт такого перекрытия сводится к расчёту изгиба балки на сплошном упругом основании, для определения элементов изгиба которой получены формулы. Исходные данные приведены в таблице 6.2.

Таблица 6.2 — Характеристики расчётного перекрытия

Наименование	Обозначение	Единица	Значение
Внешнее давление	P	Па	1000
Длина ПС	L	м	3
Длина БГН	l	м	2
Момент инерции поперечного сечения ПС	I	м^4	$5{,}208 \cdot 10^{-6}$
Момент инерции поперечного сечения БГН	i	м^4	$5{,}208 \cdot 10^{-6}$

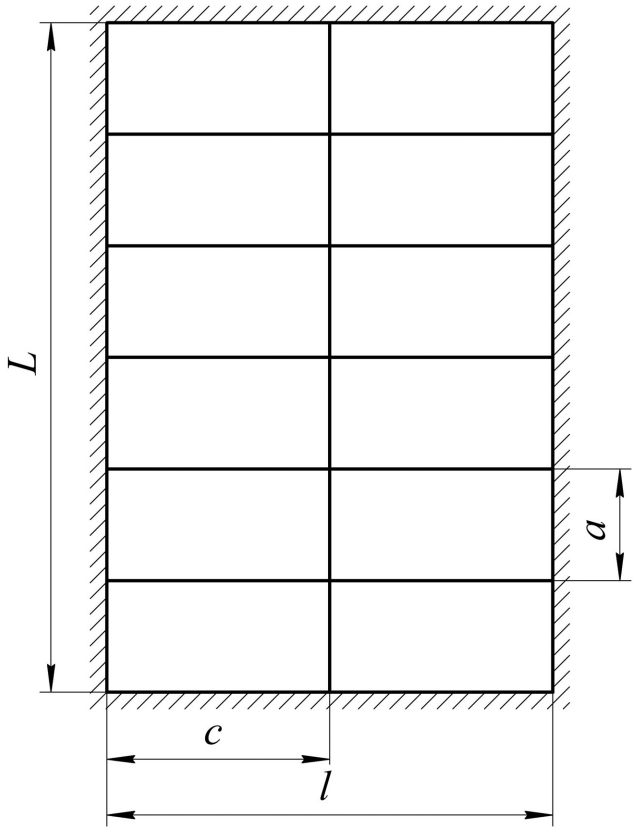

Рисунок 6.5 — Схема расчётного перекрытия

6.3 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НДС ПРОСТОГО ПЕРЕКРЫТИЯ

Расчёт начнём с определения двух отвлечённых безразмерных коэффициентов β и γ, не имеющих явного физического смысла. В случае шарнирного опирания БГН на контур

$$\beta = \frac{1}{24} \cdot \frac{c^2}{\ell^2} \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{c}{\ell} + \frac{c^2}{\ell^2}\right) = \frac{1}{24} \cdot \frac{1^2}{2^2} \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1^2}{2^2}\right) = 2,604 \cdot 10^{-3}, \qquad (6.7)$$

$$\gamma = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{c}{\ell}\right)^3 \cdot \frac{(\ell - c)^3}{\ell} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{(2-1)^3}{2} = 5,208 \cdot 10^{-3}. \qquad (6.8)$$

Используя полученные значения, мы можем вычислить коэффициент u:

$$u = \sqrt[4]{\frac{k \cdot L^4}{64 \cdot E \cdot I}} = \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 10^5 \cdot 3^4}{64 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5,208 \cdot 10^{-6}}} = 2,792, \qquad (6.9)$$

$$k = \frac{E \cdot i}{\gamma \cdot a \cdot \ell^3} = \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 5,208 \cdot 10^{-6}}{5,208 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 \cdot 2^3} = 5 \cdot 10^5, \qquad (6.10)$$

где k — коэффициент жёсткости упругого основания, Па.

Для нахождения максимального прогиба определим интенсивность нагрузки q, Н/м, на ПС:

$$q = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{Q}{a} = \frac{2,604 \cdot 10^{-3}}{5,208 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1000 \cdot 5}{0,5} = 5 \cdot 10^{3},$$

$$Q = P \cdot a \cdot l = 5 \cdot 10^{3}, \tag{6.11}$$

где Q — внешняя нагрузка, воспринимаемая одной БГН, Н.

Запишем формулу для максимального прогиба υ_{max}, м, находящегося в данной расчётной схеме в серединном сечении ПС:

$$\upsilon_{max} = \frac{q}{k}\left(1 - \varphi_0\left(u\right)\right) = \frac{5 \cdot 10^{3}}{5 \cdot 10^{5}} \cdot \left(1 + 0,115\right) = 1,115 \cdot 10^{-2}, \tag{6.12}$$

$$\varphi_0\left(u\right) = -0,115, \tag{6.13}$$

где $\varphi_0\left(u\right)$ — безразмерный коэффициент, зависящий от u, определяемый по таблице.

7 РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

7.1 СОЗДАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Для создания геометрической модели перекрытия с характеристиками, представленными в таблице 6.2, аналогично способу, описанному в Разделе 3, воспользуемся модулем «Логос Гибрид».

Как уже было описано в Разделе 3, при моделировании стержневых систем с использованием балочных элементов важным фактором является ориентация сечения балочного элемента, задающаяся унифицированно в рамках одной «Подобласти». Моделировать плоскую балочную систему можно в рамках одной подобласти, выбирая необходимую ориентацию и поворот сечения, однако при моделировании такого подхода будет недостаточно. В рамках моделирования перекрытия разберём вариант с созданием нескольких подобластей.

Для этого необходимо создавать элементы, которые возможно описать одной подобластью в рамках одного компонента, либо сгруппировать их после их создания. Для этого в панели «Гибрид» необходимо выбрать раздел «Инструменты» и ниже выбрать пункт «Переместить в компонент».

Создадим модель описанного выше перекрытия, для этого создадим два компонента *с* названиями «ПС» и «БГН». Далее построим основные точки по данным, приведённым в таблице 7.1.

Таблица 7.1 — Координаты точек модели перекрытия

Номер точки	Координата *X*, м	Координата *Y*, м	Координата *Z*, м
1	0	0	–0
2	1	0	–0
3	1	0	–1
4	1	0	−1
5	2	0	–0
6	2	0	–1
7	2	0	−1
8	3	0	–0
9	3	0	–1
10	3	0	−1
11	4	0	–0
12	4	0	–1
13	4	0	−1
14	5	0	–0
15	5	0	–1
16	5	0	−1
17	6	0	–0

Создадим геометрическую модель балок, создав ребра, соединяя между собой следующие точки: 1–2; 2–3; 2–4; 2–5; 5–6; 5–7; 5–8; 8–9; 8–10; 8–11; 11–12; 11–13; 11–14; 14–15; 14–16; 14–17. При создании рёбер необходимо определить для ребра соответствующий компонент (компонент ПС для элементов, составляющих перекрёстную связь, компонент БГН для элементов, составляющих балки главного направления).

7.2 СОЗДАНИЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ СЕТКИ

При создании конечно-элементной сетки воспользуемся пунктом «Генерация 1*d* сетки» → «Построение 1*d* сетки» в разделе «Операции с сеткой». Создавать сетку необходимо используя параметр «По размеру», равный 0,1 м, при этом необходимо удостоверится, что в параметре «Целевой компонент» выбран вариант «по геометрии».

Теперь необходимо склеить узлы балочных элементов в точках пересечения ПС и БГН, для этого в разделе «Операции с сеткой» выберем пункт «Операции с узлами» → «Объединение узлов», определим тип элементов — ячейки, выберем все ячейки, участвующие в формировании пересечения балок, и выполним операцию. Сохраним полученную конечно-элементную сетку под названием «*Perek*_1_5.*k*».

Импортируем конечно-элементную сетку, использовав меню «Модель» → «Импорт модели» → «Логос Прочность» и указав ранее созданный файл «*Perek*_1_5.*k*». При этом в древе модели не появится новых пунктов в разделе «Детали», однако в разделе «Подобласти» появятся два новых пункта, это и есть конечно-элементная сетка, заранее разбитая по компонентам. При импорте сетки данным способом информация о подобластях считывается на основе информации о компонентах, заданных в модуле «Логос Гибрид».

7.3 ЗАДАНИЕ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

Далее зададим параметры материала, аналогично предыдущим задачам, по таблице 3.2.

7.4 ЗАДАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСЧЁТА

Изменив тип задачи на «Статическая прочность», при задаче параметров подобластей необходимо создать два отдельных набора данных, один для ПС, другой для БГН. Материал, тип элемента, поперечное сечение будут задаваться в них одинаково, аналогично задаче о шарнирно опёртой однопролётной балке (см. подраздел 3.5). Ориентация сечения для первого набора данных, в который будет входить первая подобласть с названием «ПС», будет иметь направляющий вектор вида (0, 0, 1), для второго набора данных, в который будет входить вторая подобласть с названием «БГН», будет иметь направляющий вектор вида (1, 0, 0). При составлении пространственных схем можно будет воспользоваться этим принципом ориентации балочных элементов.

7.5 ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Для задания граничных условий воспользуемся возможностью создавать «Наборы данных». В общем случае в ПО «Логос» в наборы могут объединяться узлы, ребра, грани, тела. В рамках нашей задачи необходимо создать 4 набора узлов. Для этого в древе модели развернём раздел «Наборы данных», на подразделе «Наборы узлов» нажмём правой кнопкой мыши и создадим 4 набора узлов.

Выберем первый набор, переименуем его в «Шарниры БГН» и добавим в него узлы, соответствующие точкам № 3, 6, 9, 12 и 15. Для удобства можно воспользоваться выбором по прямоугольной области, для этого необходимо переключить режим выбора в панели «Выбор элементов» (включается в меню «Вид» «Панели инструментов»). Итого 5 узлов.

Выберем второй набор, переименуем его в «Шарниры БГН подвижные» и добавим в него аналогичным образом узлы, соответствующие точкам № 4, 7, 10, 13 и 16. Итого 5 узлов.

Выберем третий набор, переименуем его в «Шарниры ПС» и добавим в него узлы, соответствующие точкам № 1 и 17. Итого 2 узла.

Выберем четвёртый набор, переименуем его в «Нагрузка» и добавим в него все узлы, принадлежащие БГН, кроме краевых, а именно кроме узлов, соответствующих точкам № 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15 и 16. Итого 95 узлов.

Теперь необходимо развернуть разделы «Нагрузка» → «Механика» → «Сила» и в подразделе «Сила, приложенная к набору» создать один пункт. Его параметры заполнить согласно таблице 7.2.

Таблица 7.2 — Параметры внешней нагрузки

Набор узлов	Нагрузка
Степень свободы	Нагрузка в направлении оси *y*
Тип	Константа
Константа	−52,632

Значение поле «Константа», равное минус 52,632, обусловлено тем, что в рамках этого условия нагружения мы задаём в каждом узле силу, перпендикулярную плоскости перекрытия. Внешняя нагрузка, воспринимаемая одной БГН, по формуле равна 1000 Н, её необходимо распределить на 19 промежуточных узлов БГН; разделив значение Q на количество узлов, мы получаем значение усилия в каждом узле БГН, равное 52,632. Знак «минус» обусловлен лишь тем, что при выводе данных в таком случае перемещения окажутся отрицательного знака и будут отложены в удобную для отображения в визуализаторе сторону оси Y.

7.6 ЗАПУСК РАСЧЁТА ЗАДАЧИ

Перед запуском расчёта необходимо сохранить модель. Для этого необходимо в главном меню выбрать «Модель» → «Сохранить» → «Модель». В появившемся диалоговом окне «Выбор файла для экспорта модели» выбираем рабочую папку и в поле «Имя файла» вводим «*Perek_1_5.yaml*». После этого запускаем расчёт нажатием кнопки «Запустить расчётную задачу» на панели инструментов.

7.7 ОБРАБОТКА ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для просмотра результатов воспользуемся визуализатором *ScientificView*. Откроем файл «...*Perek_1_5**Perek_1_5.RESULTS**EFR_CUT**Perek_1_5*_001*Perek_1_5*_001.*efr*.» Выберем отображаемой величиной в узлах перемещения по оси *Y* «*Displ_Y*». Максимальное значение перемещения, расположенное посередине пролёта балки, имеет значение 11,499 мм.

7.8 ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РАСЧЁТА

Для определения точности расчёта и достоверности модели необходимо провести верификацию, для этого сравним результаты аналитического и численного расчёта, определим точность численного расчёта.

Воспользуемся формулой (3.1) и терминологией, описанной в Разделе 3.9 применимо к балке ПС. Результаты верификации приведены в таблице 7.3.

Таблица 7.3 — Результаты верификации с аналитическим решением

Аналитический расчёт, мм	Численный расчёт, мм	Погрешность, %
11,15	11,499	3,13

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 **ГОСТ Р 57412–2017**. Компьютерные модели в процессах разработки, производства и эксплуатации изделий. Общие положения: Издание официальное. — Введ. 2017–07–01. — М.: Стандартинформ, 2017. — *IV*, 11 с.

2 **ГОСТ Р 57700.10–2018**. Определение напряжённо-деформированного состояния. Верификация и валидация численных моделей сложных элементов конструкций в упругой области: Издание официальное. — Введ. 2019–01–01. — М.: Стандартинформ, 2018. — *IV*, 12 с. — (Численное моделирование физических процессов).

3 **ГОСТ Р 57188–2016**. Термины и определения: Издание официальное. — Введ. 2017–05–01. — М.: Стандартинформ, 2016. — *IV*, 8 с. — (Численное моделирование физических процессов).

4 **ГОСТ 2.052–2015**. Электронная модель изделия. Общие положения: Издание официальное. — Введ. 2017–03–01. — М.: Стандартинформ, 2016. — *IV*, 11 с. — (Единая система конструкторской документации).

5 **Погорелов В.И.** Строительная механика тонкостенных конструкций. — СПб.: БХВ-Петербург, 2007. — 528 с.

6 **Шиманский Ю.А**. Справочник по строительной механике корабля. Т. 1. — Л.: Судпромгиз, 1958. — 627 с.

7 **Короткин Я.И., Локшин А.З., Сиверс Н.Л.** Изгиб и устойчивость стержней и стержневых систем. — М.: Машгиз, 1953. — 518 с.

8 **ВНИИЭФ**. Руководство пользователя «Логос ПреПост» 5.3.18. — 2018.

9 **ВНИИЭФ**. Руководство пользователя «Логос Прочность» 5.3.18. — 2018.

10 **ВНИИЭФ**. Руководство пользователя *ScientificView* 5.3.18. — 2018.

11 **Timoshenko S.** Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems, 3rd Edition. — New York, NY: D. Van Nostrand Co. Inc., 1955.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТАХ 3
1.1 Основные сведения о механике деформируемого твёрдого тела 3
1.2 Основные сведения о методах численного моделирования задач механики деформируемого твёрдого тела 5

2 ОБЗОР ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ С ИЗВЕСТНЫМ АНАЛИТИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ 7
2.1 Основные сведения о задачах с эталонным аналитическим решением 7
2.2 Постановка задачи об изгибе однопролётной шарнирно опёртой балки 12
2.3 Аналитическое решение задачи об изгибе однопролётной шарнирно опёртой балки 12

3 РЕШЕНИЕ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ С ИЗВЕСТНЫМ АНАЛИТИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ 15
3.1 Создание геометрической модели 15
3.2 Создание конечно-элементной сетки 17
3.3 Задание свойств материала 17
3.4 Задание параметров расчёта 18
3.5 Задание граничных условий 18
3.6 Задание внешней нагрузки 19
3.7 Запуск расчёта задачи 19
3.8 Обработка полученных результатов 19
3.9 Верификация численного метода расчёта 20

4 ОБЗОР ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ С ИЗВЕСТНЫМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ РЕЗУЛЬТАТОМ 21
4.1 Постановка задачи об изгибе однопролётной шарнирно опёртой балки с консолями 21
4.2 Результаты эксперимента 22

5 РЕШЕНИЕ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ С ИЗВЕСТНЫМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ РЕЗУЛЬТАТОМ 23
5.1 Создание геометрической модели 23
5.2 Создание конечно-элементной модели 23
5.3 Задание свойств материала 23
5.4 Задание параметров расчёта 23
5.5 Запуск расчёта задачи 24
5.6 Обработка полученных результатов 24
5.7 Верификация численного метода расчёта 24

6 ОБЗОР ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ 26
6.1 Общие сведения о перекрытиях 26
6.2 Постановка задачи об определении НДС простейшего перекрытия 31
6.3 Аналитическое решение задачи о НДС простого перекрытия 32

7 РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ 34
7.1 Создание геометрической модели 34
7.2 Создание конечно-элементной сетки 35

7.3 Задание свойств материала 35
7.4 Задание параметров расчёта 35
7.5 Задание граничных условий 36
7.6 Запуск расчёта задачи 36
7.7 Обработка полученных результатов 37
7.8 Верификация численного метода расчёта 37

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 38

Титов Григорий Валерьевич
Смирнов Александр Игоревич
Курносов Андрей Алексеевич
Прядкин Александр Сергеевич
Бурковецкий Константин Александрович
Фомичев Дмитрий Владимирович
Деулин Андрей Александрович
Чижов Георгий Витальевич
Глазунова Елена Владимировна

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НДС
В ПРИЛОЖЕНИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА
И ИНЖЕНЕРНОГО АНАЛИЗА ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ**

Редактор *Е.В. Дмитриева*
Компьютерная верстка *О.А. Пелипенко*

Подписано в печать 09.08.2024.
Бумага офсетная. Формат 70×100 1/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 2,5. Тираж 30 экз. Заказ 430/1285.

Издательство МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4
Москва, А-80, ГСП-3 125993

Типография Издательства МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4
Москва, А-80, ГСП-3 125993